

# Société et stabilité: De la théorie aux conclusions

**F. Thomas Bruss**

Université libre de Bruxelles  
Faculté des sciences  
Département de Mathématique

Université de Luxembourg,  
7 janvier 2016

# Questions

- Qu'est-ce qu'une société?

# Questions

- Qu'est-ce qu'une société?
- Quel est le but d'une société?

# Questions

- Qu'est-ce qu'une société?
- Quel est le but d'une société?
- Pourquoi y a-t-il autant de formes?

# Questions

- Qu'est-ce qu'une société?
- Quel est le but d'une société?
- Pourquoi y a-t-il autant de formes?
- Y a-t-il des «limites de sociétés»?

# But de l'exposé

# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)



# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)

(ii) A modéliser: reproduction, production, exigences, politique et contrôle, interaction,

# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)

(ii) A modéliser: reproduction, production, exigences, politique et contrôle, interaction,

## II Résultats principaux

# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)

(ii) A modéliser: reproduction, production, exigences, politique et contrôle, interaction,

## II Résultats principaux

(I) Le modèle

# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)

(ii) A modéliser: reproduction, production, exigences, politique et contrôle, interaction,

## II Résultats principaux

(I) Le modèle

(II) Critères nécessaires et suffisants de survie

# But de l'exposé

## **I Modèles de sociétés**

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)

(ii) A modéliser: reproduction, production, exigences, politique et contrôle, interaction,

## **II Résultats principaux**

(I) Le modèle

(II) Critères nécessaires et suffisants de survie

(iii) Théorème de l'enveloppement

# But de l'exposé

## I Modèles de sociétés

(i) Hypothèses naturelles (individus et sociétés)

(ii) A modéliser: reproduction, production, exigences, politique et contrôle, interaction,

## II Résultats principaux

(I) Le modèle

(II) Critères nécessaires et suffisants de survie

(iii) Théorème de l'enveloppement

(iv) Interprétation et directives

# Objectifs d'une société

# Objectifs d'une société

Egalité, justice, liberté, fraternité



# Objectifs d'une société

Egalité, justice, liberté, fraternité  
sécurité,

# Objectifs d'une société

Egalité, justice, liberté, fraternité  
sécurité,  
tolérance, droit de l'homme,

# Objectifs d'une société

Egalité, justice, liberté, fraternité  
sécurité,  
tolérance, droit de l'homme,  
niveau de vie (élevé),

# Objectifs d'une société

Egalité, justice, liberté, fraternité  
sécurité,  
tolérance, droit de l'homme,  
niveau de vie (élevé),  
conscience de l'environnement,.....

# Hypothèses naturelles

# Hypothèses naturelles

I Toute société voudrait survivre et voir un futur pour les enfants

# Hypothèses naturelles

- I Toute société voudrait survivre et voir un futur pour les enfants
- II Des individus visent en général un *niveau de vie* supérieur.

# Hypothèses naturelles

I Toute société voudrait survivre et voir un futur pour les enfants

II Des individus visent en général un *niveau de vie* supérieur.

Priorité: I emporte sur II



# Histoire des résultats obtenus

# Histoire des résultats obtenus

- Premiers modèles: "Resource Depending Branching Processes" ( B. 1983)

# Histoire des résultats obtenus

- Premiers modèles: "Resource Depending Branching Processes" ( B. 1983)
- Modèle avec reproduction bisexuelle (B. 1984)

# Histoire des résultats obtenus

- Premiers modèles: "Resource Depending Branching Processes" ( B. 1983)
- Modèle avec reproduction bisexuelle (B. 1984)
- Améliorations du modèle:  
interaction exigences-compétition pour des ressources.

# Histoire des résultats obtenus

- Premiers modèles: "Resource Depending Branching Processes" ( B. 1983)
- Modèle avec reproduction bisexuelle (B. 1984)
- Améliorations du modèle:  
interaction exigences-compétition pour des ressources.
- UC Santa Barbara **B. and Robertson** (1991)

# Histoire des résultats obtenus

# Histoire des résultats obtenus

- Nouvelles modifications du modèle: "interaction."

# Histoire des résultats obtenus

- Nouvelles modifications du modèle: "interaction."
- Idée d'un «Théorème de l'enveloppement de sociétés» (2002)



# Histoire des résultats obtenus

- Nouvelles modifications du modèle: "interaction."
- Idée d'un «Théorème de l'enveloppement de sociétés» (2002)
- Le «Théorème de l'enveloppement de sociétés»  
**B. and Duerinckx** (2015)

# Histoire des résultats obtenus

- Nouvelles modifications du modèle: "interaction."
- Idée d'un «Théorème de l'enveloppement de sociétés» (2002)
- Le «Théorème de l'enveloppement de sociétés»  
**B. and Duerinckx** (2015)
- Y-a-t'il des *enveloppements locaux* utiles?

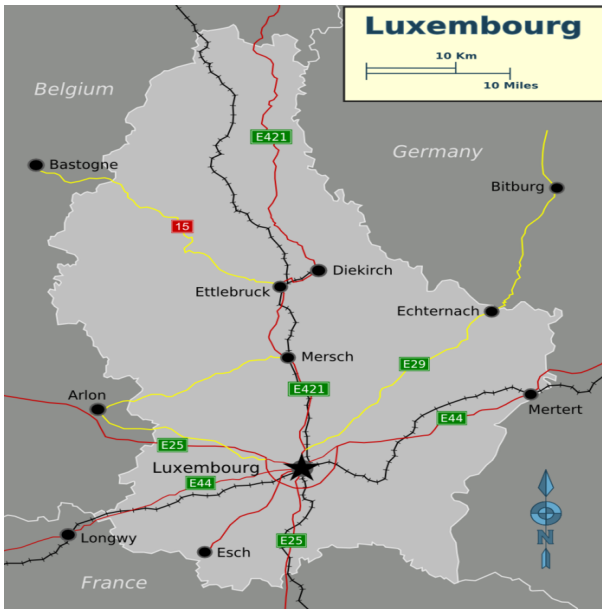


Equipes belges compétition Internationale Math. 2011

# Applications







# Définition ciblée



**Définition:** Une société est un groupe d'individus, qui se met d'accord sur certains règles comment vivre ensemble, organiser l'éducation, ....

**Définition:** Une société est un groupe d'individus, qui se met d'accord sur certains règles comment vivre ensemble, organiser l'éducation, ....

...et sur les règles définissant la *politique* de créer et de distribuer les ressources.

Modélisation par un *processus de branchement*

## 1. "Survie"

Modélisation par un *processus de branchement*

## 1. "Survie"

La société voudrait survivre

≡

voudrait survivre pour toujours avec une probabilité  $> 0$ .

Modélisation par un *processus de branchement*

## 1. "Survie"

La société voudrait survivre

≡

voudrait survivre pour toujours avec une probabilité  $> 0$ .

## 2. Temps discret: $1, 2, 3, \dots$

Modélisation par un *processus de branchement*

## 1. "Survie"

La société voudrait survivre

≡

voudrait survivre pour toujours avec une probabilité  $> 0$ .

## 2. Temps discret: $1, 2, 3, \dots$ (acceptable)

Modélisation par un *processus de branchement*

## 1. "Survie"

La société voudrait survivre

≡

voudrait survivre pour toujours avec une probabilité  $> 0$ .

## 2. Temps discret: $1, 2, 3, \dots$ (acceptable)

## 3. Reproduction asexuelle

Modélisation par un *processus de branchement*

1. "Survie"

La société voudrait survivre

≡

voudrait survivre pour toujours avec une probabilité  $> 0$ .

2. Temps discret:  $1, 2, 3, \dots$  (acceptable)

3. Reproduction asexuelle (acceptable)



# Processus de branchement dépendant de ressources

# Processus de branchement dépendant de ressources

- (a) *Descendants*:  $(D_{i,j})$  v.a. indépend. ident. distribuées  
(iid) avec loi  $\{p_k\}_{k=0,1,2,\dots}$

# Processus de branchement dépendant de ressources

(a) *Descendants*:  $(D_{i,j})$  v.a. indépend. ident. distribuées (iid) avec loi  $\{p_k\}_{k=0,1,2,\dots}$  avec  $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ .

# Processus de branchement dépendant de ressources

(a) *Descendants*:  $(D_{i,j})$  v.a. indépend. ident. distribuées (iid) avec loi  $\{p_k\}_{k=0,1,2,\dots}$  avec  $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ .

(b) *Exigences ou besoins individuelles* de ressources:  $(X_{i,k})$  iid, fct. de distr. continue  $F_X =: F$

# Processus de branchement dépendant de ressources

(a) *Descendants*:  $(D_{i,j})$  v.a. indépend. ident. distribuées (iid) avec loi  $\{p_k\}_{k=0,1,2,\dots}$  avec  $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ .

(b) *Exigences ou besoins individuelles* de ressources:  $(X_{i,k})$  iid, fct. de distr. continue  $F_X =: F$

Remarque: Exigence et compétition.

# Processus de branchement dépendant de ressources

(a) *Descendants*:  $(D_{i,j})$  v.a. indépend. ident. distribuées (iid) avec loi  $\{p_k\}_{k=0,1,2,\dots}$  avec  $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ .

(b) *Exigences ou besoins individuelles* de ressources:  $(X_{i,k})$  iid, fct. de distr. continue  $F_X =: F$

Remarque: Exigence et compétition.

(c) *Creations individuelles de ressources* :  $(R_{i,k})$  iid, fct. de distr. continue.

# Processus de branchement dépendant de ressources

(a) *Descendants*:  $(D_{i,j})$  v.a. indépend. ident. distribuées (iid) avec loi  $\{p_k\}_{k=0,1,2,\dots}$  avec  $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ .

(b) *Exigences ou besoins individuelles* de ressources:  $(X_{i,k})$  iid, fct. de distr. continue  $F_X =: F$

Remarque: Exigence et compétition.

(c) *Creations individuelles de ressources* :  $(R_{i,k})$  iid, fct. de distr. continue.

Remarque: Création au sens très large.

# Processus de branchement dépendant de ressources

(d) "*Politique*" gère les ressources disponibles et détermine les règles de distribution.



# Processus de branchement dépendant de ressources

(d) "*Politique*" gère les ressources disponibles et détermine les règles de distribution.

(e) *Interaction par émigration* (au sens large)

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

# Modèle mathématique

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

Temps  $n$ , #individus =  $\Gamma_n$

# Modèle mathématique

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

Temps  $n$ , #individus =  $\Gamma_n$

Génération  $n + 1$  : période  $]n, n + 1]$ ;

# Modèle mathématique

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

Temps  $n$ , #individus =  $\Gamma_n$

Génération  $n + 1$  : période  $]n, n + 1]$ ;

- # descendants:  $\leftarrow D(\Gamma_n)$

# Modèle mathématique

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

Temps  $n$ , #individus =  $\Gamma_n$

Génération  $n + 1$  : période  $]n, n + 1]$ ;

- # descendants:  $\leftarrow D(\Gamma_n)$
- ressources  $\leftarrow R(\Gamma_n)$  (héritage - consomm. + création)

# Modèle mathématique

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

Temps  $n$ , #individus =  $\Gamma_n$

Génération  $n + 1$  : période  $]n, n + 1]$ ;

- # descendants:  $\leftarrow D(\Gamma_n)$
- ressources  $\leftarrow R(\Gamma_n)$  (héritage - consomm. + création)
- Exigences individ.  $:= (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,D(\Gamma_n)})$

Processus  $(\Gamma_n)_{n=1,2,\dots}$

Temps  $n$ , #individus =  $\Gamma_n$

Génération  $n + 1$  : période  $]n, n + 1]$ ;

- # descendants:  $\leftarrow D(\Gamma_n)$
- ressources  $\leftarrow R(\Gamma_n)$  (héritage - consomm. + création)
- Exigences individ.  $:= (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,D(\Gamma_n)})$

(interprétation!).





- $\Gamma_{n+1} := D(\Gamma_n) - \# \text{ émigrés en } ]n, n + 1]$

# Définition globale d'une politique

Une *Politique* est une fonction qui associe des priorités aux demandes de ressources.

# Resource Depending Branching process

## RDBP

**Définition:** Un *RDBP* (Resource Depending Branching Process) avec politique  $\pi$  est un processus  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , défini

$$\Gamma_0 = 1,$$

et pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ , récursivement par

$$\Gamma_{n+1} = Q^\pi(D_n(\Gamma_n), (X_n^k)_{k=1}^{D_n(\Gamma_n)}, R_n(\Gamma_n))$$

où  $D_n(\cdot)$ ,  $R_n(\cdot)$ , ....

# Modèle réaliste?

Est-ce que ce modèle pourrait être réaliste pour décrire le développement d'une société?

# Modèle réaliste?

Est-ce que ce modèle pourrait être réaliste pour décrire le développement d'une société?

Non! Car ....

# Modèle réaliste?

Est-ce que ce modèle pourrait être réaliste pour décrire le développement d'une société?

Non! Car ....

## Idée:

Décrire le développement d'une société par la suite des décisions respectant les directives imposées par les hypothèses H1 et H2.

**"Generation obligation principle"**  
(GOP)

# Modèle réaliste?

Est-ce que ce modèle pourrait être réaliste pour décrire le développement d'une société?

Non! Car ....

## **Idée:**

Décrire le développement d'une société par la suite des décisions respectant les directives imposées par les hypothèses H1 et H2.

## **"Generation obligation principle" (GOP)**

Définition: Un "processus société" est une suite de RDBPs aléatoires soumises au GOP.



# Sociétés particulières

# Sociétés particulières

## 1. Société "fcfs" (first come-first served)

# Sociétés particulières

1. Société "fcfs" (first come-first served)
- 2 . "Laissez-faire"

# Sociétés particulières

1. Société "fcfs" (first come-first served)
- 2 . "Laissez-faire"
3. Société "aléatoire"

# Sociétés particulières

1. Société "fcfs" (first come-first served)
- 2 . "Laissez-faire"
3. Société "aléatoire"
4. Société **wf** (weakest-first): satisfait les demandes les plus petites d'abord.

# Sociétés particulières

1. Société "fcfs" (first come-first served)
- 2 . "Laissez-faire"
3. Société "aléatoire"
4. Société **wf** (weakest-first): satisfait les demandes les plus petites d'abord.
5. Société **sf** (strongest-first): satisfait les demandes les plus grandes d'abord.

# Sociétés particulières

1. Société "fcfs" (first come-first served)
- 2 . "Laissez-faire"
3. Société "aléatoire"
4. Société **wf** (weakest-first): satisfait les demandes les plus petites d'abord.
5. Société **sf** (strongest-first): satisfait les demandes les plus grandes d'abord.

.....

# Société "Weakest-first"

Déf.: La politique *weakest-first*  $\pi^W$  est  $\pi_t^W((x_k)_{k=1}^t) = \sigma$ ,  
où  $\sigma$  permutation  $[t]$  telle que  $x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(t)}$ .



# Société "Weakest-first"

Déf.: La politique *weakest-first*  $\pi^W$  est  $\pi_t^W((x_k)_{k=1}^t) = \sigma$ ,  
où  $\sigma$  permutation  $[t]$  telle que  $x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(t)}$ .

Le nombre de ceux qui peuvent rester dans la société

$$N(t, (x_k)_{k=1}^t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0 \text{ où } x_{1,t} > s, \\ \sup \left\{ 1 \leq k \leq t : \sum_{j=1}^k x_{j,t} \leq s \right\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Société "Weakest-first"

Déf.: La politique *weakest-first*  $\pi^W$  est  $\pi_t^W((x_k)_{k=1}^t) = \sigma$ ,  
où  $\sigma$  permutation  $[t]$  telle que  $x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(t)}$ .

Le nombre de ceux qui peuvent rester dans la société

$$N(t, (x_k)_{k=1}^t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0 \text{ où } x_{1,t} > s, \\ \sup \left\{ 1 \leq k \leq t : \sum_{j=1}^k x_{j,t} \leq s \right\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

0....|.....|.....| .....|.....|....s (stop)

# Processus strongest-first

Déf.: La politique *strongest-first*  $\pi^S$  est définie par  $\pi_t^S((x_k)_{k=1}^t) = \sigma$ , où  $\sigma$  permutation de  $[t]$  telle que  $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(t)}$ .

# Processus strongest-first

Déf.: La politique *strongest-first*  $\pi^S$  est définie par  $\pi_t^S((x_k)_{k=1}^t) = \sigma$ , où  $\sigma$  permutation de  $[t]$  telle que  $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(t)}$ .

La fonction compteur associée est

$$M(t, (x_k)_{k=1}^t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0 \text{ ou } x_{t,t} > s \\ \sup \left\{ 1 \leq k \leq t : \sum_{j=t-k+1}^t x_{j,t} \leq s \right\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Processus strongest-first

Déf.: La politique *strongest-first*  $\pi^S$  est définie par  $\pi_t^S((x_k)_{k=1}^t) = \sigma$ , où  $\sigma$  permutation de  $[t]$  telle que  $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(t)}$ .

La fonction compteur associée est

$$M(t, (x_k)_{k=1}^t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0 \text{ ou } x_{t,t} > s \\ \sup \left\{ 1 \leq k \leq t : \sum_{j=t-k+1}^t x_{j,t} \leq s \right\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

0 .....|.....|.....|..*stop*

# Resultats

1. Tout RDBP  $(\Gamma_n)$  est un processus Markovien (0 absorbant)

# Resultats

1. Tout RDBP  $(\Gamma_n)$  est un processus Markovien (0 absorbant)

$$2. \begin{aligned} q_\Gamma &:= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma_n = 0 | \Gamma_0 = 1), \\ q_w &:= \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n = 0 | W_0 = 1). \end{aligned}$$

$$\implies \text{pour tout } (\Gamma): q_w \leq q_\Gamma$$

# Resultats

1. Tout RDBP  $(\Gamma_n)$  est un processus Markovien (0 absorbant)
2.  $q_\Gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma_n = 0 | \Gamma_0 = 1)$ ,  
 $q_w := \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n = 0 | W_0 = 1)$ .  
  
 $\implies$  pour tout  $(\Gamma)$ :  $q_w \leq q_\Gamma$
3. Dominance uniforme:  $\Gamma_n \leq W_n$  p.s. pour tout  $n$  et tout  $(\Gamma)$ .



# Resultats

1. Tout RDBP  $(\Gamma_n)$  est un processus Markovien (0 absorbant)

$$2. \quad q_\Gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma_n = 0 | \Gamma_0 = 1), \\ q_w := \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n = 0 | W_0 = 1).$$

$$\implies \text{pour tout } (\Gamma): q_w \leq q_\Gamma$$

3. Dominance uniforme:  $\Gamma_n \leq W_n$  p.s. pour tout  $n$  et tout  $(\Gamma)$ .

4. Pour toute valeur initiale  $v$ :

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0 | W_0 = v) \leq q_w^v$$

Remarque: Il **n'est pas vrai** que  $S_n \leq \Gamma_n$  pour tout  $n$   
(contre-exemple!)

Remarque: Il **n'est pas vrai** que  $S_n \leq \Gamma_n$  pour tout  $n$  (contre-exemple!)

5. **Cependant**, pour des valeurs initiales suffisamment grandes il reste vrai sous une condition faible (\*) que

$$q_w = 1 \Rightarrow q_\Gamma^* = 1 \Rightarrow q_s^* = 1$$

Remarque: Il **n'est pas vrai** que  $S_n \leq \Gamma_n$  pour tout  $n$  (contre-exemple!)

5. **Cependant**, pour des valeurs initiales suffisamment grandes il reste vrai sous une condition faible (\*) que

$$q_w = 1 \Rightarrow q_\Gamma^* = 1 \Rightarrow q_s^* = 1$$

6. Ceci suffit pour montrer

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W_n\right) > 1 - \epsilon.$$

Remarque: Il **n'est pas vrai** que  $S_n \leq \Gamma_n$  pour tout  $n$  (contre-exemple!)

5. **Cependant**, pour des valeurs initiales suffisamment grandes il reste vrai sous une condition faible (\*) que

$$q_w = 1 \Rightarrow q_\Gamma^* = 1 \Rightarrow q_s^* = 1$$

6. Ceci suffit pour montrer

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W_n) > 1 - \epsilon.$$

7. Ainsi pour l'essentiel:

$$q_w \leq q_\Gamma \leq q_s.$$

# Théorème de l'enveloppement

## Théorème de l'enveloppement des sociétés

# Théorème de l'enveloppement

## **Théorème de l'enveloppement des sociétés**

Aucune société respectant les hypothèses I et II  
ne pourra dépasser à la longue "l'enveloppe"  
constituée par, d'un côté, la société wf,  
et d'autre côté, la société sf.

# Théorème de l'enveloppement

## **Théorème de l'enveloppement des sociétés**

Aucune société respectant les hypothèses I et II  
ne pourra dépasser à la longue "l'enveloppe"  
constituée par, d'un côté, la société wf,  
et d'autre côté, la société sf.



# Intuitions correctes et fausses

**Société wf:** intuition de dominance **correcte**

# Intuitions correctes et fausses

**Société wf:** intuition de dominance **correcte**

**Société sf:** intuition de sous-dominance **fausse**

# Intuitions correctes et fausses

**Société wf:** intuition de dominance **correcte**

**Société sf:** intuition de sous-dominance **fausse**

Mais....

# Idées/outils de la démonstration:

- Convergence i.p.,
- convergence p.s.,
- convergence complète,
- lemmes type Borel-Cantelli,
- temps d'arrêt, Théorème de Wald,
- analyse.

- statistiques d'ordres et fonctions de distr. empirique, (Borel-Glivenko)
- $(W_n)$  p.s. .- comparaison
- $S_N$  i.p. - comparaison:

Soit  $(\Gamma_n)_n$  un RDBP avec politique  $\pi$  sur  $(D_n^k, X_n^k, R_n^k)_{n,k}$ .  
 Pour tout  $\delta > 0$ ,  $1 > \eta > 0$  il existe  $L_{\delta,\eta} \in \mathbb{N}_0$  tel que

$$P \left[ \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} \geq \frac{S_{n+1}}{S_n} - \delta \mid \Gamma_n \geq L_{\delta,\eta} \ S_n \geq L_{\delta,\eta} \right] \geq 1 - \eta.$$

- Propriétés proc. de Markov (extinction ou explosion)

# L'intérêt du Théorème de l'enveloppement de société

# L'intérêt du Théorème de l'enveloppement de société

- Quel est le vrai intérêt du Théorème ?



# L'intérêt du Théorème de l'enveloppement de société

- Quel est le vrai intérêt du Théorème ?

Réponse: Nous pouvons explicitement calculer les valeurs critiques de l'enveloppe en fonction de  $m, r, F$  et  $(\mu)$ .

# Evaluation: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

# Evaluation: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

① Si  $m > 1$ ,  $\mu > 0$ ,  $r \leq m\mu$ , et  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

# Evaluation: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

① Si  $m > 1, \mu > 0, r \leq m\mu$ , et  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

- ①  $mF(\tau) < 1 \implies$  extinction (à la longue);
- ②  $mF(\tau) > 1 \implies$  survie très probable.

# Evaluation: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

- 1 Si  $m > 1, \mu > 0, r \leq m\mu$ , et  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

- 1  $mF(\tau) < 1 \implies$  extinction (à la longue);
- 2  $mF(\tau) > 1 \implies$  survie très probable.

- 2  $r > m\mu \implies$  survie très probable.

# Lemmes de B. and Robertson (1991)

Soient  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. avec  $\mu < \infty$  et fonction de distr. continue  $F$ . Soit  $(\Phi_n)_n$  une suite de v.a. entières  $\Phi_n \rightarrow \infty$  p.s. et  $(\Psi_n)_n$  une suite  $\Psi_n \rightarrow \infty$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$ . Si  $\Psi_n/\Phi_n \rightarrow \rho$  p.s. avec  $0 < \rho \leq \mu$  et si  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x dF(x) = \rho$$

alors

$$N(\Phi_n, (X_k)_{k=1}^{\Phi_n}, \Psi_n)/\Phi_n \rightarrow F(\tau) \text{ p.s.}$$

- Pour  $(S_n)_n$ :

- Pour  $(S_n)_n$ : Soient  $m > 1, \mu > 0$  et les exigences *bornées*.



- Pour  $(S_n)_n$ : Soient  $m > 1, \mu > 0$  et les exigences *bornées*.

① Si  $r \leq m\mu$  et  $\theta$  est solution de

$$\int_{\theta}^b x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

- Pour  $(S_n)_n$ : Soient  $m > 1, \mu > 0$  et les exigences bornées.

❶ Si  $r \leq m\mu$  et  $\theta$  est solution de

$$\int_{\theta}^b x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

- ❶  $m(1 - F(\theta)) < 1 \implies q_S = 1;$
- ❷  $m(1 - F(\theta)) > 1$  et NT  $\implies q_S < 1.$

- Pour  $(S_n)_n$ : Soient  $m > 1, \mu > 0$  et les exigences bornées.

① Si  $r \leq m\mu$  et  $\theta$  est solution de

$$\int_{\theta}^b x dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

①  $m(1 - F(\theta)) < 1 \implies q_S = 1;$

②  $m(1 - F(\theta)) > 1$  et NT  $\implies q_S < 1.$

②  $r > m\mu$  et NT  $\implies q_S < 1.$

# Exemples sociétés "classiques"

Où les sociétés bien connues se trouvent-elles?

# Exemples sociétés "classiques"

Où les sociétés bien connues se trouvent-elles?

## 1. Mercantilisme?









# Exemples sociétés "classiques"

Où les sociétés bien connues se trouvent-elles?

## 1. Mercantilisme?

0|..... ··· .....|..... ··· .....|..... ··· |.|.|.|.|.|.|.|. ··· |s

## 2. Mercantilisme «éclairé»?

0|..... ··· .....|.....|..... ··· |...|...|...|...|...|...|...|...| ··· |s

## 3. Société «Laissez-faire»?



# Continuation exemples sociétés "classiques"

- 4. Sociétés en Europe d'ouest : B, L, F, NE, D, .....

# Continuation exemples sociétés "classiques"

- 4. Sociétés en Europe d'ouest : B, L, F, NE, D, .....
- 5. Socialisme?

# Continuation exemples sociétés "classiques"

- 4. Sociétés en Europe d'ouest : B, L, F, NE, D, .....
- 5. Socialisme?
- 6. Communisme (Marxisme, ....., Léninisme)?

# Continuation exemples sociétés "classiques"

- 4. Sociétés en Europe d'ouest : B, L, F, NE, D, .....
- 5. Socialisme?
- 6. Communisme (Marxisme, ....., Léninisme)?
- 7. Capitalisme?

# Continuation exemples sociétés "classiques"

- 4. Sociétés en Europe d'ouest : B, L, F, NE, D, .....
- 5. Socialisme?
- 6. Communisme (Marxisme, ....., Léninisme)?
- 7. Capitalisme?

# Différences idéologiques?



# Différences idéologiques?

Quelles sont les sociétés les plus opposées l'une à l'autre?

# Différences idéologiques?

Quelles sont les sociétés les plus opposées l'une à l'autre?

(Ultra)-communisme (wf)  $\leftrightarrow$  (ultra)-capitalisme (sf)

# Différences idéologiques?

Quelles sont les sociétés les plus opposées l'une à l'autre?

(Ultra)-communisme (wf)  $\leftrightarrow$  (ultra)-capitalisme (sf)

Pourquoi?

# Conclusion

Pour des distributions stationnaires de toutes les v.a.

# Conclusion

Pour des distributions stationnaires de toutes les v.a.

- Aucune société n'a une prob. de survie plus grande que

# Conclusion

Pour des distributions stationnaires de toutes les v.a.

- Aucune société n'a une prob. de survie plus grande que la société wf (ultra-communisme).

# Conclusion

Pour des distributions stationnaires de toutes les v.a.

- Aucune société n'a une prob. de survie plus grande que la société wf (ultra-communisme).
- Aucune société n'a un niveau moyen de vie plus grande que la société sf (ultra-capitalisme).

# Conclusion

Pour des distributions stationnaires de toutes les v.a.

- Aucune société n'a une prob. de survie plus grande que la société wf (ultra-communisme).
- Aucune société n'a un niveau moyen de vie plus grande que la société sf (ultra-capitalisme).
- Les sociétés wf et sf forment une «quasi-enveloppe» de toutes sociétés.



# Conclusion

Pour des distributions stationnaires de toutes les v.a.

- Aucune société n'a une prob. de survie plus grande que la société wf (ultra-communisme).
- Aucune société n'a un niveau moyen de vie plus grande que la société sf (ultra-capitalisme).
- Les sociétés wf et sf forment une «quasi-enveloppe» de toutes sociétés.
- Les deux sont hautement instables, mais leurs "courbes critiques" donnent les directives.

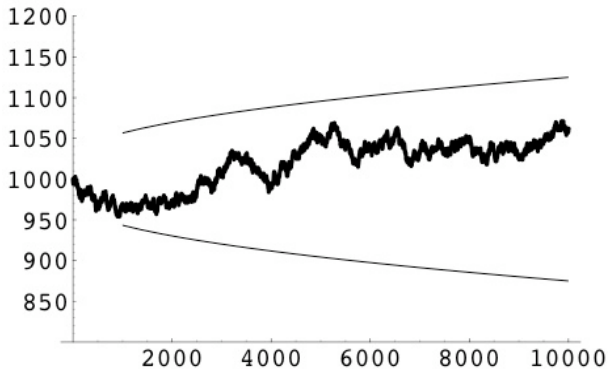
# Conclusions

Les hypothèses naturelles impliquent  
des fluctuations des politiques aussi naturelles,

# Conclusions

Les hypothèses naturelles impliquent  
des fluctuations des politiques aussi naturelles,  
et la quasi-enveloppe donne les limites des fluctuations.

## compromis survie et niveau de vie



# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

Suède: 11,9, Norvège: 12,1 , GB : 12,2, ...

# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

Suède: 11,9, Norvège: 12,1 , GB : 12,2, ...

**Belgique:** 10,0



# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

Suède: 11,9, Norvège: 12,1 , GB : 12,2, ...

**Belgique:** 10,0

**GD Luxembourg:** 11,7

# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

Suède: 11,9, Norvège: 12,1 , GB : 12,2, ...

**Belgique:** 10,0

**GD Luxembourg:** 11,7

**France:** 12,6

# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

Suède: 11,9, Norvège: 12,1 , GB : 12,2, ...

**Belgique:** 10,0

**GD Luxembourg:** 11,7

**France:** 12,6

.....

# Taux de reprod. par 1000 hab. (Europe)

Irlande: 15,1

Suède: 11,9, Norvège: 12,1 , GB : 12,2, ...

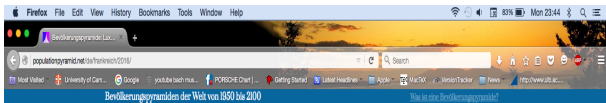
**Belgique:** 10,0

**GD Luxembourg:** 11,7

**France:** 12,6

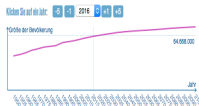
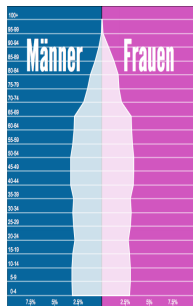
.....

**Allemagne:** 8,2



# Frankreich 2016

Bevölkerung 64.668.000



Klicken Sie auf die Land:

A B C D E **F** G H I J K L M N O P  
R S T U V W Z

Friedrich  
**Frankreich**  
Französisch-Polynesien

Finnland  
Französisch-Guayana

Schlüsselwörter: Demografie, Bevölkerungspyramide, Alterspyramide, Altersstruktur, Alterungsstand. — Wollt ihr auch: [pyramidsonmap.net](http://pyramidsonmap.net)  
Source: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division. World Population Prospects: The 2015 Revision. (Medium variant)  
Made by [maderwald.net](http://maderwald.net). Do not hesitate to report errors to [maderwald@maderwald.net](mailto:maderwald@maderwald.net)

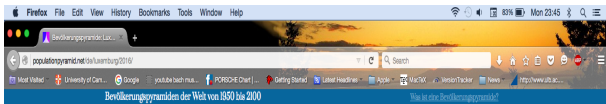
populationspyramid.net/da/franreich/2016/Mappe-D



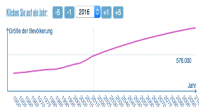
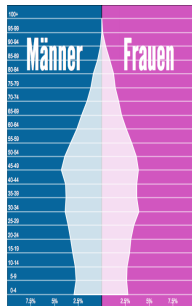
## Pyramide d'âge France

F. Thomas Bruss





Luxemburg  
2016  
Bevölkerung: 576.000



Klicken Sie auf ein Jahr:

Klicken Sie auf ein Land:

A B C D E F G H I J K L M N O P  
R S T U V W Z

Lesotho  
Lettland  
Liberia  
Litauen  
Luxemburg

Schlüsselwörter: Demografie, Bevölkerungspyramide, Alterspyramide, Altersstruktur, Alterung, Ruhezustand. — Wolligstich gefüllt: Ihnen auch: [pyramidsonmap.net](http://pyramidsonmap.net)  
Source: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division. World Population Prospects: The 2015 Revision. (Medium variant)  
Made by [madewy@pyramidsonmap.net](mailto:madewy@pyramidsonmap.net). Do not hesitate to report errors to [madewy@pyramidsonmap.net](mailto:madewy@pyramidsonmap.net)



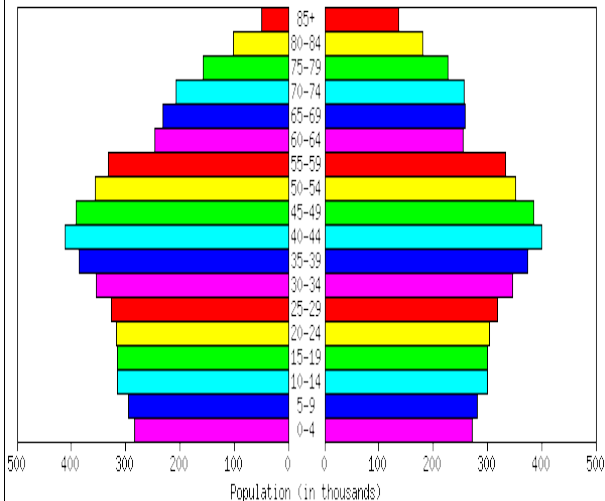
Pyramide d'âge GD de Luxembourg

F. Thomas Bruss

# Belgium: 2005

MALE

FEMALE



Source: U.S. Census Bureau, International Data Base.



# Comme avant: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

# Comme avant: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

- ① Si  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

# Comme avant: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

- ① Si  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

- ①  $mF(\tau) < 1 \implies$  extinction (à la longue);

# Comme avant: interaction des paramètres critiques

- Pour la société wf:  $(W_n)$  :

- ① Si  $\tau$  est solution de

$$\int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m},$$

alors

- ①  $mF(\tau) < 1 \implies$  extinction (à la longue);

# dérivées partielles ...et directives

$$\text{Objectif : } mF(\tau) \geq 1 \quad \text{où} \quad \int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m}.$$

# dérivées partielles ...et directives

$$\text{Objectif : } mF(\tau) \geq 1 \quad \text{où} \quad \int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m}.$$

$$F(\tau[r, m]) \geq \frac{r}{m\tau[r, m]},$$

# dérivées partielles ...et directives

$$\text{Objectif : } mF(\tau) \geq 1 \quad \text{où} \quad \int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m}.$$

$$F(\tau[r, m]) \geq \frac{r}{m\tau[r, m]},$$

$$\tau[r, m] f(\tau[r, m]) \frac{\partial \tau[r, m]}{\partial m} = \frac{-r}{m^2},$$

# dérivées partielles ...et directives

$$\text{Objectif : } mF(\tau) \geq 1 \quad \text{où} \quad \int_0^\tau x \, dF(x) = \frac{r}{m}.$$

$$F(\tau[r, m]) \geq \frac{r}{m\tau[r, m]},$$

$$\tau[r, m] f(\tau[r, m]) \frac{\partial \tau[r, m]}{\partial m} = \frac{-r}{m^2},$$

$$\frac{\partial(mF)}{\partial m} = F(\tau[r, m]) + mf(\tau[r, m]) \frac{\partial \tau[r, m]}{\partial m} \geq 0.$$



# ....messages à emmener à la maison?

- Ne pas sous-estimer l'applicabilité des mathématiques

# ....messages à emmener à la maison?

- Ne pas sous-estimer l'applicabilité des mathématiques
- Modélisation trop compliquée? : Essayer, examiner, ...essayer.

# ....messages à emmener à la maison?

- Ne pas sous-estimer l'applicabilité des mathématiques
- Modélisation trop compliquée? : Essayer, examiner, ...essayer.
- Beauté de la vérité mathématique ....

# ....messages à emmener à la maison?

- Ne pas sous-estimer l'applicabilité des mathématiques
  - Modélisation trop compliquée? : Essayer, examiner, ...essayer.
  - Beauté de la vérité mathématique ....
- ....de la force d'un raisonnement rigoureux.

# ....messages à emmener à la maison?

- Ne pas sous-estimer l'applicabilité des mathématiques
  - Modélisation trop compliquée? : Essayer, examiner, ...essayer.
  - Beauté de la vérité mathématique ....
- ....de la force d'un raisonnement rigoureux.
- ....un d'un résultat général.

# Grand-Duché de Luxembourg



Les objectifs possibles:

- état moderne, éducation, culture,....
- économie forte, mobilité, .. ..... ..

Les objectifs possibles:

- état moderne, éducation, culture,....
- économie forte, mobilité, .. ..... ..

Mais aussi ....

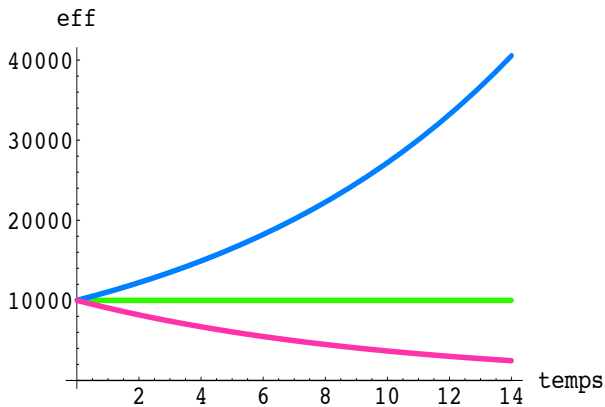


Les objectifs possibles:

- état moderne, éducation, culture,....
- économie forte, mobilité, .. ..... ..

Mais aussi ....

**Mir welle bleiwe wat mir sinn**







**Action bonus pour bébés luxembourgeois!**

# Références

B. (1984): "A note on extinction criteria for bisexual Galton-Watson processes" , J. Appl. Probability

# Références

B. (1984): "A note on extinction criteria for bisexual Galton-Watson processes" , J. Appl. Probability

B. and Robertson (1991): "Wald's Lemma for sums of order statistics of iid random variables" Adv. Appl. Probability

# Références

B. (1984): "A note on extinction criteria for bisexual Galton-Watson processes" , J. Appl. Probability

B. and Robertson (1991): "Wald's Lemma for sums of order statistics of iid random variables" Adv. Appl. Probability

B. and Duerinckx (2015): "Resource Dependent Branching Processes and the Envelope of Societies", Annals of Appl. Probability

B. (1984): "A note on extinction criteria for bisexual Galton-Watson processes" , J. Appl. Probability

B. and Robertson (1991): "Wald's Lemma for sums of order statistics of iid random variables" Adv. Appl. Probability

B. and Duerinckx (2015): "Resource Dependent Branching Processes and the Envelope of Societies", Annals of Appl. Probability

J. M. Steele (2016): "The Bruss-Robertson inequality: Elaborations and Extensions", à paraître dans Mathematica Applicanda.



B. (1984): "A note on extinction criteria for bisexual Galton-Watson processes" , J. Appl. Probability

B. and Robertson (1991): "Wald's Lemma for sums of order statistics of iid random variables" Adv. Appl. Probability

B. and Duerinckx (2015): "Resource Dependent Branching Processes and the Envelope of Societies", Annals of Appl. Probability

J. M. Steele (2016): "The Bruss-Robertson inequality: Elaborations and Extensions", à paraître dans Mathematica Applicanda.

\*\*\*